対称移動による行列の積

担当：久保 康幸

実施日

M3：6/20(木) 3 コマ目
S3：6/24(月) 2 コマ目
I3：6/25(火) 1 コマ目

https://kubo-yuge.github.io/

学習目標

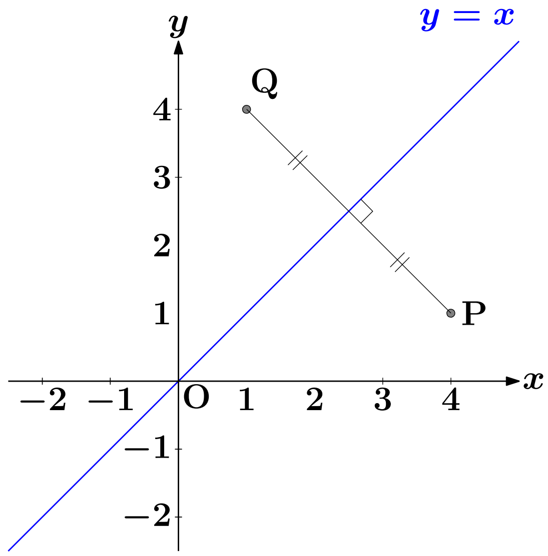
- 直線 $y = x$ に関する対称移動の式を求め，行列の積で表すことができる。
- 直線 $y = 2x$ に関する対称移動の式の求め方を説明できる。

直線に関する対称移動

対称移動の式 (問題 1)

問題 1

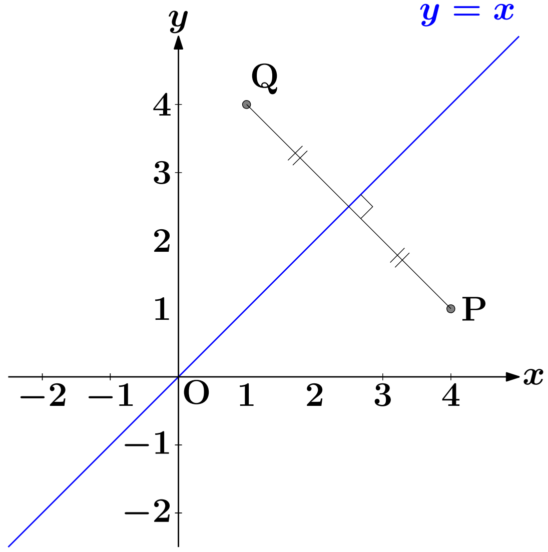
直線 $y = x$ に関する対称移動によって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ へ移るとき，x', y' を x, y の式で表せ。



問題 1 の体験

リンク先の画像をクリックし，

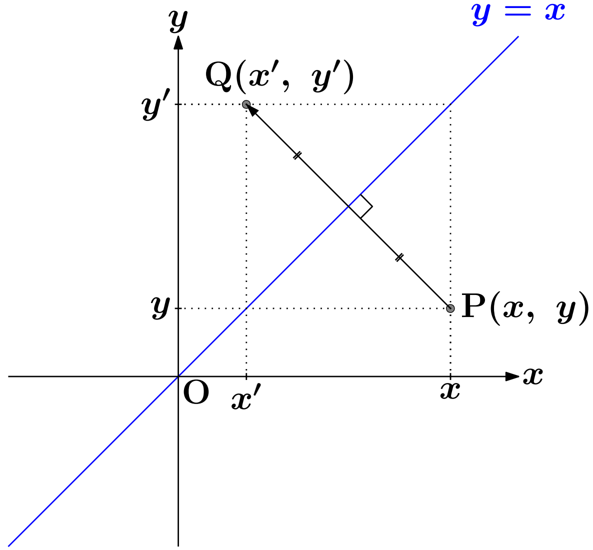
点 P を動かしてみましょう。



https://kubo-yuge.github.io/

問題 1 の解答

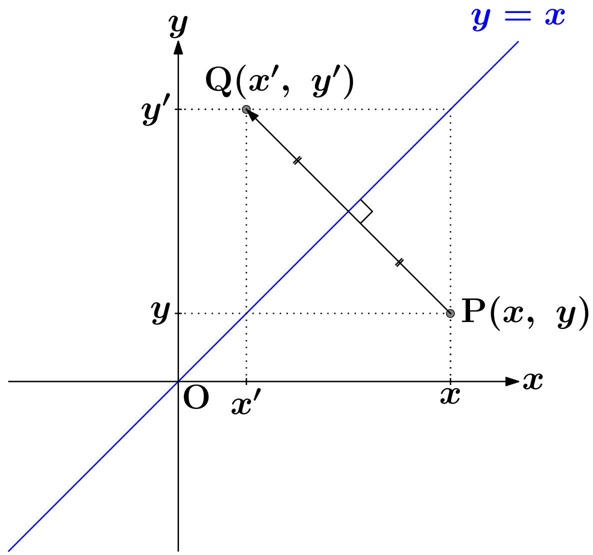
右図より，x', y' と x, y の関係は，



問題 1 の解答

右図より，x', y' と x, y の関係は，

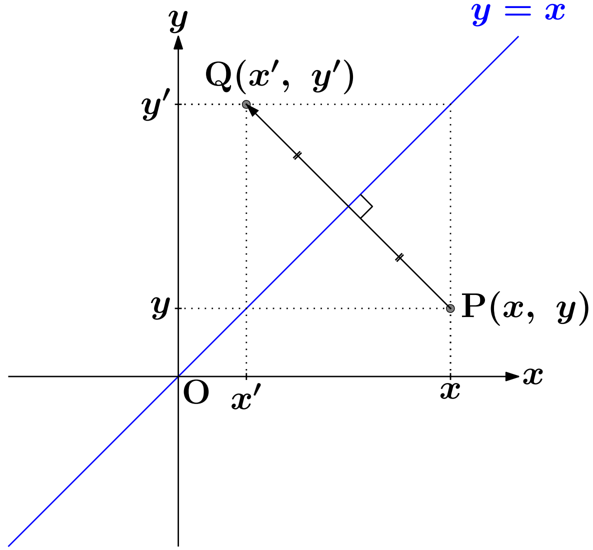
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



問題 1 の解説

直線 $y = x$ に関する対称移動は，次の関係式で表される：

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



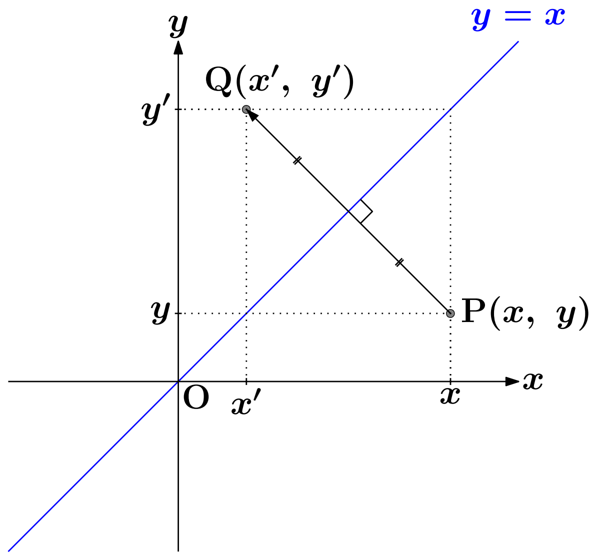
問題 1 の解説

直線 $y = x$ に関する対称移動は，次の関係式で表される：

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

きちんと書くと

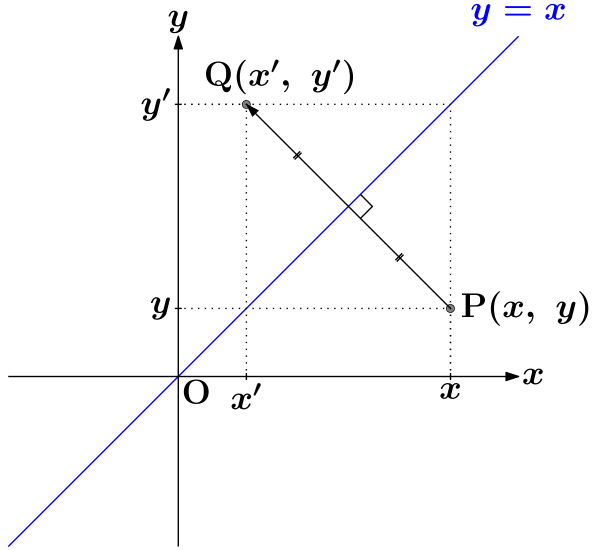
$$\begin{cases} x' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ y' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{cases}$$



問題 1 の解説

直線 $y = x$ に関する対称移動は，次の関係式で表される：

$$\begin{cases} x' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ y' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{cases}$$

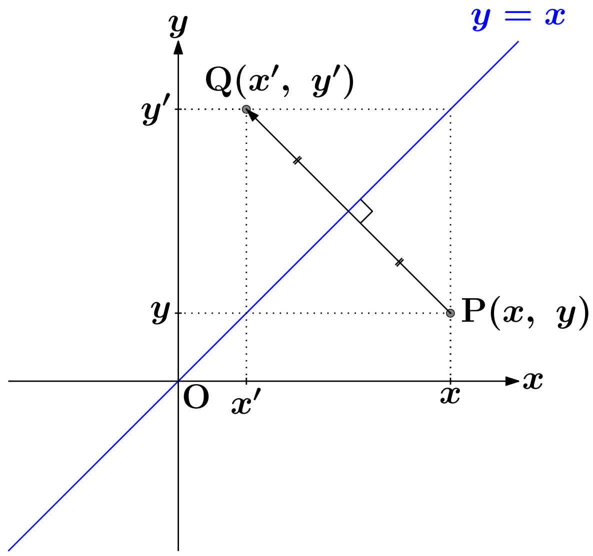


問題 1 の解説

直線 $y = x$ に関する対称移動は，次の関係式で表される：

$$\begin{cases} x' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ y' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{cases}$$

（ベクトルの内積）



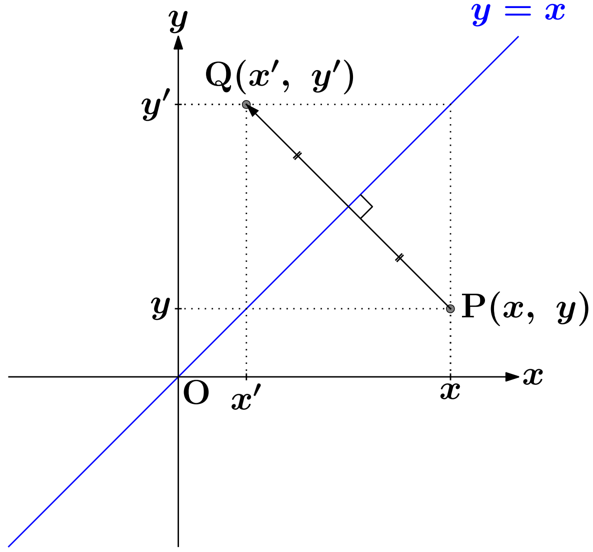
問題 1 の解説

直線 $y = x$ に関する対称移動は，次の関係式で表される：

$$\begin{cases} x' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ y' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (0,\ 1) \bullet (x,\ y) \\ y' = (1,\ 0) \bullet (x,\ y) \end{cases}$$

（ベクトルの内積）



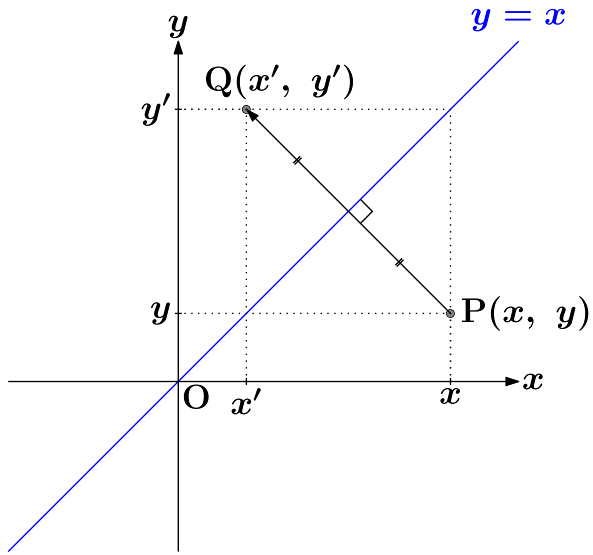
問題 1 の解説

直線 $y = x$ に関する対称移動は，次の関係式で表される：

$$\begin{cases} x' = (0,\ 1)\bullet(x,\ y) \\ y' = (1,\ 0)\bullet(x,\ y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$$

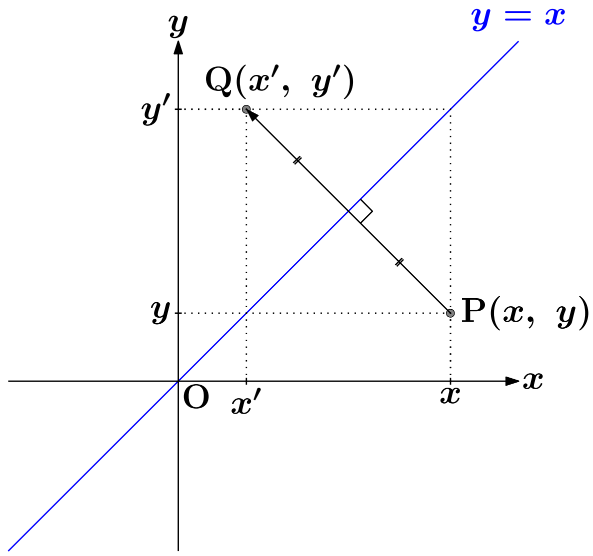
（ベクトルの内積）



問題 1 の解説

直線 $y = x$ に関する対称移動は，次の関係式で表される：

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$$



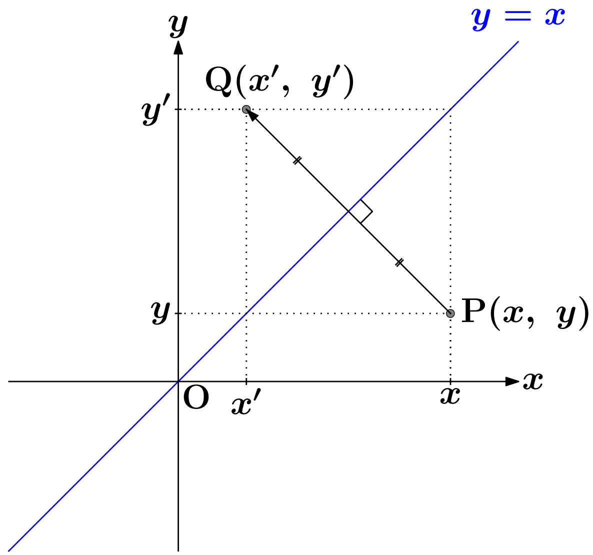
2 つの式を 1 つにまとめると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

問題 1 の解説

直線 $y = x$ に関する対称移動は，次の関係式で表される：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



点 P の位置ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対称移動を表す行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ をかけると，点 Q の位置ベクトル $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ になることを意味する．

移動を表す行列

移動を表す行列

問題 1 の場合に限らず，$y = mx$ に関する対称移動は，

移動を表す行列

問題 1 の場合に限らず，$y = mx$ に関する対称移動は，点 (x, y) の移動先の点 (x', y') を

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

と表すことができます。

移動を表す行列

問題 1 の場合に限らず，$y = mx$ に関する対称移動は，点 (x, y) の移動先の点 (x', y') を

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

と表すことができます。

これを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ と表すことにしましょう。

移動を表す行列

問題 1 の場合に限らず，$y = mx$ に関する対称移動は，点 (x, y) の移動先の点 (x', y') を

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

と表すことができます。

これを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ と表すことにしましょう。

右辺は，$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とします。

移動を表す行列 A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ のとき，

移動を表す行列 A

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 (x, y) の移動先は，

移動を表す行列 A

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 (x, y) の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$ なので，

移動を表す行列 A

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 (x, y) の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$ なので，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

移動を表す行列 A

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 (x, y) の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$ なので，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

移動を表す行列 A

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 (x, y) の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$ なので，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

移動を表す行列 A

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 (x, y) の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$ なので，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

移動を表す行列 A

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 (x, y) の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$ なので，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

２つを横に並べると，

移動を表す行列 A

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 (x, y) の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$ なので，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

２つを横に並べると，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ c & d \end{array}\right)$$

移動を表す行列 A

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 (x, y) の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$ なので，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

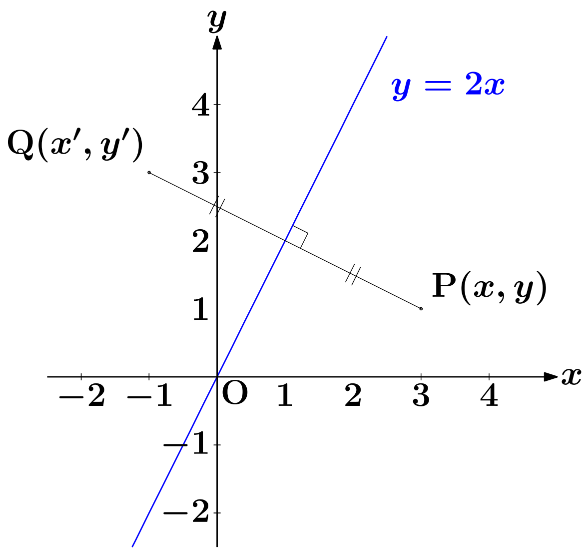
２つを横に並べると，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

対称移動の式 (問題 2)

問題 2

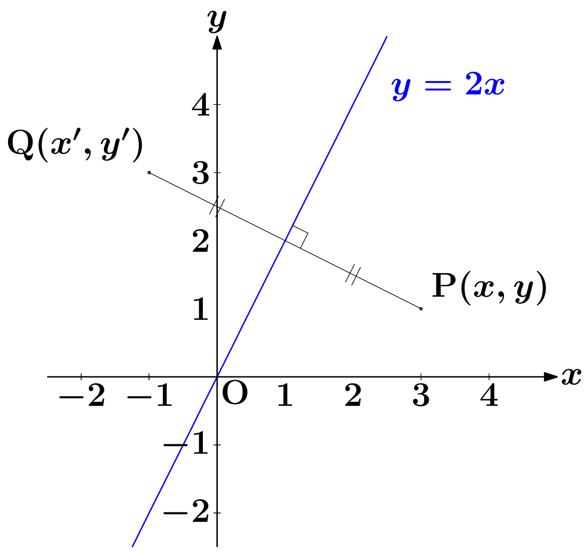
直線 $y=2x$ に関する対称移動によって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ へ移るとき，x', y' を x, y の式で表せ。



対称移動の式 (問題 2)

問題 2

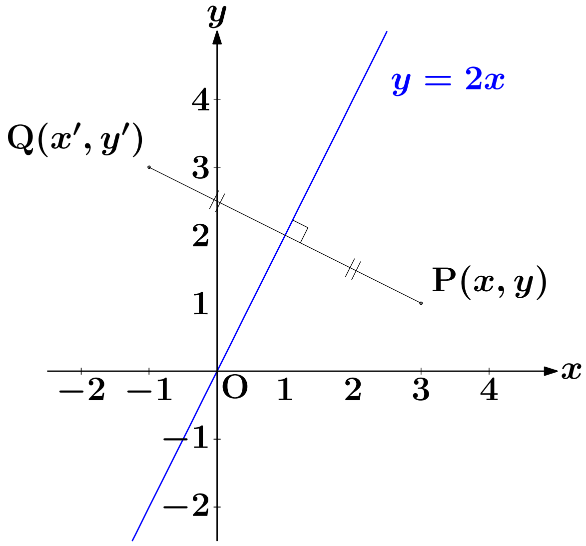
直線 $y=2x$ に関する対称移動によって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ へ移るとき，x', y' を x, y の式で表せ。



問題 2 は難しい！

問題２の体験

リンク先の２番目の画像をクリックし，点Pを動かしてみましょう。

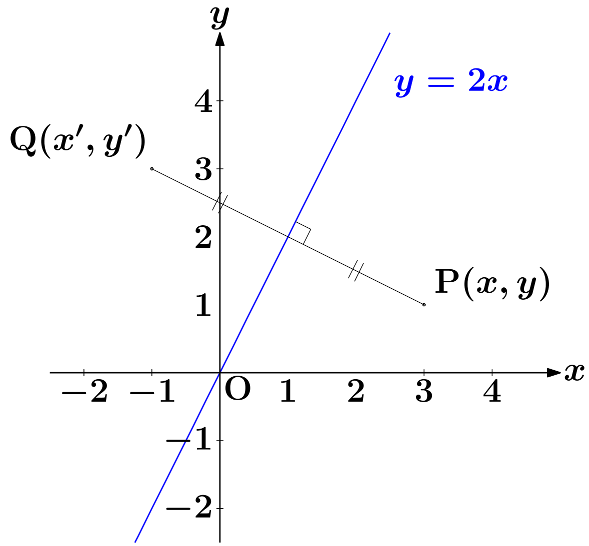


https://kubo-yuge.github.io/

問題 2 の解答

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = 2x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

(答)



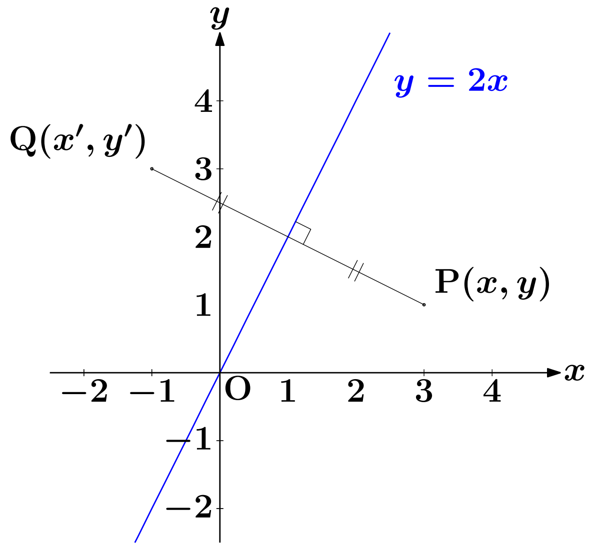
問題 2 の解答

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = 2x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

(答)

リンク先の画像をクリックし，

点 P を動かしてみましょう。



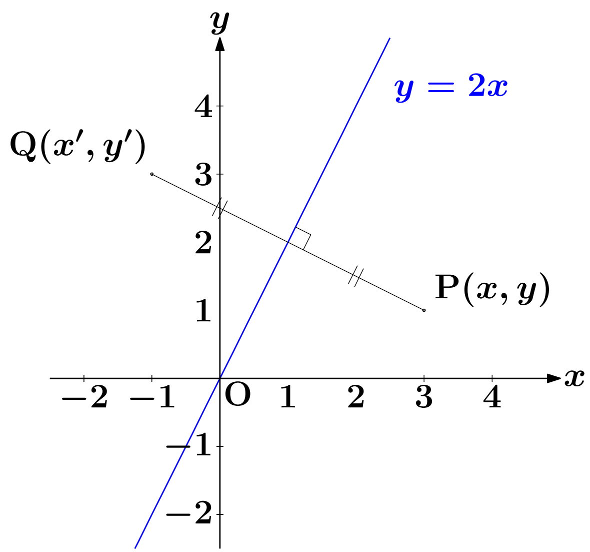
https://kubo-yuge.github.io/

問題 2 の解答

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = 2x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

(答)

リンク先の画像をクリックし，
点 P を動かしてみましょう。
どんな点 P を考えるといいかな。



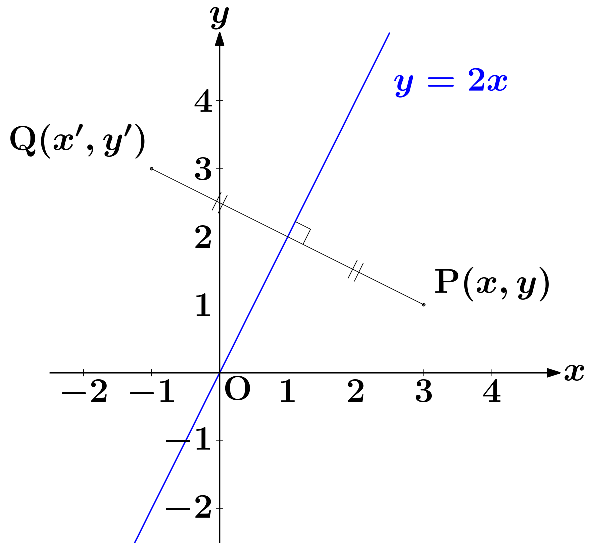
https://kubo-yuge.github.io/

問題 2 の解答

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = 2x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

(答)

リンク先の画像をクリックし，
点 P を動かしてみましょう。
どんな点 P を考えるといいかな。
点 P として，点 $(1, 0)$ と点 $(0, 1)$
を選んで，点 Q を見てみよう。



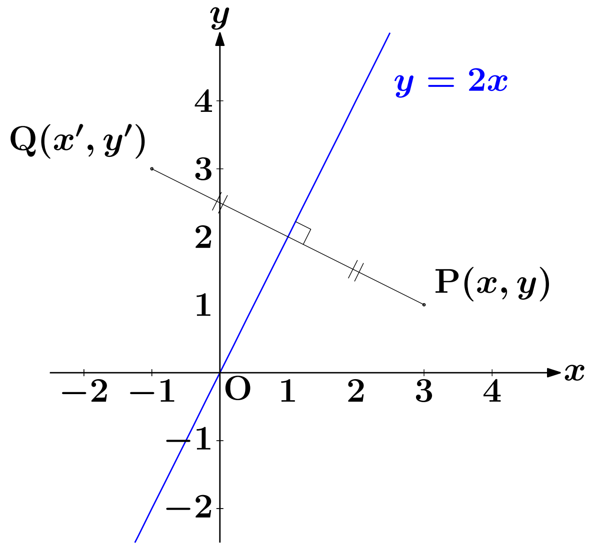
https://kubo-yuge.github.io/

問題 2 の解答

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = 2x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

(答)

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y \end{cases}$$



まとめ

- 直線 $y = x$ に関する対称移動の式を求め，行列の積で表すと，どうなりましたか。

まとめ

- 直線 $y = x$ に関する対称移動の式を求め，行列の積で表すと，どうなりましたか。
- 直線 $y = 2x$ に関する対称移動の式を求めるには，どうすればいいでしょうか。

まとめ

- 直線 $y = x$ に関する対称移動の式を求め，行列の積で表すと，どうなりましたか。
- 直線 $y = 2x$ に関する対称移動の式を求めるには，どうすればいいでしょうか。
- その対称移動を表す行列は，どうなるでしょうか。

まとめ

- 直線 $y = x$ に関する対称移動の式を求め，行列の積で表すと，どうなりましたか。
- 直線 $y = 2x$ に関する対称移動の式を求めるには，どうすればいいでしょうか。
- その対称移動を表す行列は，どうなるでしょうか。

これらの答をアンケートの裏面に記入してください。